Prof. Dr. Alfred Toth

Kontexturierte Kategorien und Garben?

1. Sehr stark vereinfacht, könnte man sagen, eine Kategorie bestehe aus einer Domäne, einer Kodomäne und den Morphismen (Pfeilen) zwischen den Elementen, die aus ersterer auf letztere abgebildet werden:

$\underline{\underline{K}} = (X, \pi, Y)$.

Entsprechend besteht eine Garbe aus zwei topologischen Räumen G und X sowie einem (lokalen) Homöomorphismus, d.h. einer Abbildung, die jede offene Teilmenge aus G auf eine offene Teilmenge aus X abbildet:

$\underline{\underline{G}} = (G, \pi, X)$.

Rein formal weisen also sowohl die Kategorie als auch die Garbe die gleiche „Tiefenstruktur“ auf. Die Existenzberechtigung von Garben ergibt sich „for passing from local to global situations“ (Kashiwara/Shapira 2006, S. V), semiotisch also etwa beim Übergang von Monaden und Dyadenkombinationen zu Triaden (vgl. Toth 2010).

2. Wenn wir von den für die meisten mathematischen Strukturen geforderten Zusatzbedingungen für Identitäten und Kompositionen wiederum absehen, könnte man die von Kaehr (2008) eingeführten Saltatorien wie folgt definieren:

$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{K}}^{o} = (Y, \pi, X)$.

Wenn dies so tut, müsste man allerdings den Unterschied zwischen Saltatorien und dualen Kategorien definieren (von den Zusatzbedingungen des Chiasmus und der Verankerung, die sich aus der Diamantentheorie ergeben, sehen wir hier ebenfalls ab). Entsprechend könnte man aus Symmetriegrümnden eine „inverse Garbe“ wie folgt definieren:

$\underline{\underline{G}}^{o} = (X, \pi, G)$.

3. Bisher haben wir bewusst die Kontexturen weggelassen. Nun treten Kategorien und Garben immer nur in 1 Kontextur auf, aber Saltatorien und „inverse Garben" immer in ≥ 1 Kontexturen. Diese Asymmetrie ist jedoch nicht einzusehen, ausserdem ist eine Saltatorie nicht nur auf der Umkehrung der Ordnung der Kontexturenzahlen definiert, sondern auch auf der Umkehrung der Pfeile („Hetero-Morphismus"). Nichts hindert uns also daran, die folgenden 4 Neudefinitionen vorzunehmen:

$\underline{\underline{K}} = (X_{\alpha.\beta}, \pi, Y_{\gamma.\delta}, i, j \in C)$

$\underline{\underline{K}}^{o} = (Y_{\delta.\gamma}, \pi, X_{\beta.\alpha}, i, j \in C)$

$\underline{\underline{G}} = (G_{\alpha.\beta}, \pi, X_{\gamma.\delta}, i, j \in C)$

$\underline{\underline{G}}^{o} = (X_{\delta.\gamma}, \pi, G_{\beta.\alpha}, i, j \in C)$.

Man beachte, dass damit auch die duale Kategorie definiert ist:

$\times K = (Y_{\gamma.\delta}, \pi, X_{\alpha.\beta}, i, j \in C)$.

Nur die mit ^{o} bezeichneten Gebilde kehren also nicht nur die Reihenfolge von Bild und Urbildelementen um, sondern auch die Reihenfolge der Kontexturzahlen. vielleicht könnte man also von „saltatorischer" Kategorie und „saltatorischer" Garbe oder von Hetero-Kategorie und Hetero-Garbe sprechen, denn die Einführung der Saltatorien ist ja keine von der Kategorientheorie separate Theorie, sondern ihre polykonteturale Erweiterung.

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, The Book of Diamonds. Glasgow 2008

Kashiwara, Masaki/Schapira, Pierre, Categories and Sheaves. New York 2006

Toth, Alfred, Vorüberlegungen zu einem semiotischen Garbenbegriff. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2010

11.12.2010